Задачи с экономическим содержанием.

(теория, задания. примеры решений)

Работу выполнили:

1.Бутенко Т.Н. – МБОУ СОШ № 46

2. Дремина Т.А. – МБОУ гимназия № 8

3. Ильюшко М.М. - МБОУ СОШ № 46

4. Кочерга Г.Н. - МБОУ СОШ № 46

5. Фаизова Е.М. – КГБОУ ХК ЦППМСП

г. Хабаровск – 2016 г.

Оглавление.

«Особенную важность имеют те методы науки, которые позволяют решать задачу, общую для всей практической деятельности человека, как располагать своими средствами для достижения по возможности большей выгоды». (П.Л. Чебышев)

Одним из важнейших потребностей современной школы является воспитание делового человека, компетентного в сфере социально-трудовой деятельности, а также в бытовой сфере. Сегодня жизнь настоятельно требует, чтобы выпускник имел развитое экономическое мышление и был готов к жизни в условиях рыночных отношений.

В связи с преобразованием России из системы централизованного планирования в экономику рыночной ориентации экономические знания стали необходимыми как в профессиональной сфере, так и в повседневной жизни. Элементарные экономические знания позволят понять роль и права человека в обществе, готовят учеников к адекватному восприятию общества и производства, помогают им определить для себя сферу деятельности, профессию в будущем.

Согласно статистике, почти каждая семья берет кредит на приобретение того или иного товара! В сегодняшние дни потребительские кредиты, кредитные карты, автокредиты, ипотека, вклады, банковские карты и другие финансовые услуги очень распространены и играет важную роль в экономике страны и каждой семьи.

Семья выполняет важнейшую экономическую функцию. Совместно проживающие супруги, их дети и родители не просто объединяются для совместного проживания, но и решают важные экономические задачи. Семья находится в постоянных связях с государственными учреждениями, предприятиями и фирмами. Она является важнейшим поставщиком рабочей силы для предприятий и фирм, которые в свою очередь выплачивают им заработную плату, различные социальные пособия, пенсию. Домашние хозяйства являются основными потребителями товаров и услуг, поставляемых предприятиями и частными лицами.

Эффективному постижению азов экономики поможет решение задач, в содержании которых идет речь о процентах. Понятие «проценты» буквально вошло в нашу жизнь, оно атакует нас в пору утверждения рыночных отношений в экономике, в пору банкротств, инфляций, финансовых кризисов. Сами проценты не дают экономического развития, но их знание помогает в развитии практических способностей, а также умение решать экономические задачи. Обдуманное изучение процентов может способствовать развитию таких навыков как экономичность, расчетливость.

Многие школьники не в состоянии воспринимать и понимать речевые обороты взрослых, испытывают затруднения при решении задач экономического характера, а также определить для себя сферу деятельности, профессию в будущем. Если задача на расчёт платежа по кредиту является злободневной и достаточно интересной, возможно, заинтересовавшиеся ученики самостоятельно или под руководством учителя, изучив предлагаемую работу, разбирая решения примеров задач, освоят предложенные методы решения задач с экономическим содержанием.

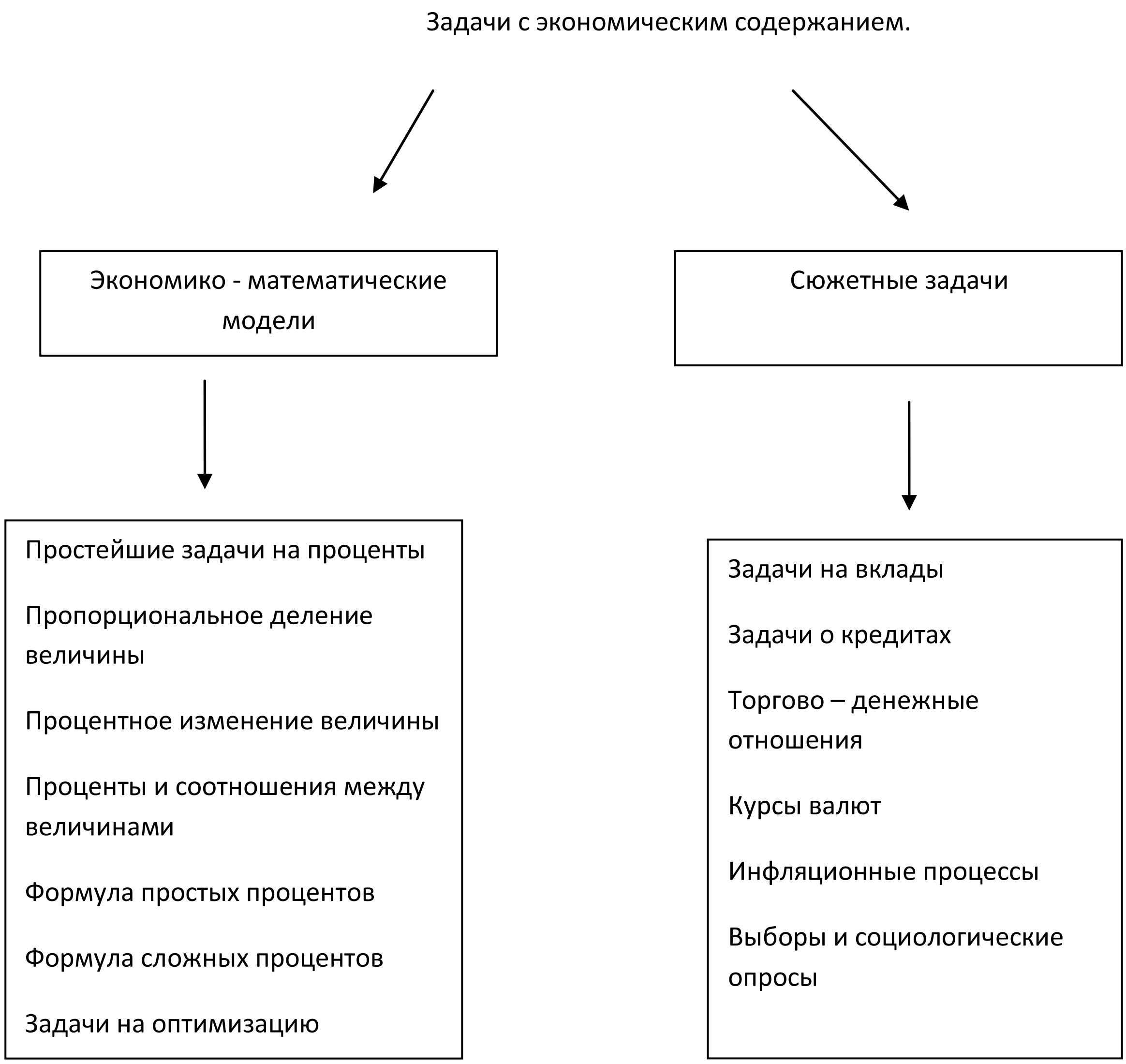
Предлагаемый материал демонстрирует учащимся применение математического аппарата к решению повседневных бытовых проблем каждого человека, вопросов рыночной экономики и задач технологии производства; ориентирует учащихся на обучение по естественно - научному и социально- экономическому профилю.

Познавательный материал будет способствовать не только выработке умений и закреплению навыков вычислений сложных процентов, но и формированию устойчивого интереса учащихся к процессу и содержанию деятельности, а также познавательной и социальной активности.

Какие цели мы преследуем:

- обобщить методы решения задач с экономическим содержанием как базового, так и повышенного уровня сложности;
- сформировать у учащихся навыки перевода реальных предметных ситуаций в различные математические модели;
- показать учащимся необходимость изучения процентов для применения их в реальных практических ситуациях.
- облегчить работу учителя по подбору задач экономического содержания

Термин «задача с экономическим содержанием» предполагает присутствие в формулировке экономических терминов, а ее решение требует составления математической модели экономического процесса. При этом большинство таких задач можно отнести к профессионально ориентированным, поскольку в процессе их решения учащиеся оперируют экономическими понятиями, необходимыми в будущей профессиональной деятельности



2.Экономико - математические модели.

2.1<u>Простейшие задачи на проценты.</u>

Для того, что бы решать задачи с экономическим содержанием, необходимо понимать, что такое процент, уметь производить процентные расчеты.

Процент – сотая доля целого (принимаемого за единицу); обозначается знаком «%». Поэтому процентом (от) какого-либо числа называется сотая часть этого числа.

При решении задач на проценты необходимо помнить:

1)Как выразить число в процентах?

Чтобы выразить число в процентах достаточно умножить его на 100 и поставить знак %

Пример: 4 = 4·100%=400%; $\frac{3}{4}$ = 0,75 = 0,75·100% = 75%

2)Как выразить проценты в виде десятичной дроби?

Чтобы выразить проценты в виде десятичной дроби достаточно число процентов разделить на 100.

Пример: 300% = 300:100 = 3;

36, 7% = 36,7:100 = 0,367;

9% = 9:100 =0,09

Пусть число a составляет k % от числа b (k называется процентным отношением числа a к числу b).

<u>Чтобы найти проценты от данного числа, надо</u>:

1)выразить проценты в виде дроби;

2)умножить данное число на эту дробь.

Запишем это формулой: $a = \frac{k}{100} \cdot b$

Чтобы найти проценты от числа, надо число процентов выразить десятичной дробью, а затем найти дробь от числа.

<u>При определении процента от числа следует помнить, что:</u>

- ✓ если процент меньше 100 % , то число, полученное в результате вычислений, должно быть меньше заданного числа;
- ✓ если процент больше 100%, то число, полученное в результате вычислений, должно быть больше заданного числа.

<u>Следовательно, при вычислении процента от числа для самоконтроля нужно проверить</u>:

- ✓ заданный в условии процент больше или меньше 100 %;
- ✓ результат вычисления больше или меньше числа, от которого находится процент.

<u>Чтобы найти число по данным его процентам, надо</u>:

1)выразить проценты в виде дроби;

2)разделить данное число на эту дробь.

Запишем это дробью: $b = a \div \frac{k}{100}$

Чтобы найти число по данным его процентам, надо выразить проценты в виде дроби и решить задачу на нахождение числа по данной его дроби.

<u>При определении числа по его проценту следует помнить, что:</u>

- ✓ если процент меньше 100%, то число, полученное в результате вычислений, больше заданного числа;
- ✓ если процент больше 100%. то число, полученное в результате вычислений, меньше заданного числа.

<u>Следовательно, при вычислении числа по его проценту для самоконтроля нужно проверить:</u>

- ✓ заданный в условии процент больше или меньше 100%;
- ✓ вычисления больше или меньше

<u>Чтобы найти процентное отношение двух чисел, надо:</u>

1)найти отношение этих чисел;

2)умножить это отношение на 100 и приписать знак %.

Запишем это формулой: $k = \frac{a}{b} \cdot 100(\%)$.

Чтобы найти процентное отношение двух чисел, надо найти отношение этих чисел и выразить его в процентах

При сравнении двух величин та, с которой производится сравнение, - базовая величина, и она принимается за 100%. В задачах на проценты сначала следует понять, какая величина принимается за 100%.

Пример 1(открытый банк заданий, прототип 77345).

Только 94% из 27500 выпускников города правильно решили задачу 1. Сколько человек правильно решили задачу 1.

Решение.

1-й способ

Задачу решили $\frac{94}{100} \cdot 27500 = 94 \cdot 275 = 25850$ человек.

2-й способ

Примем 27500 выпускников за 100%. Тогда x выпускников, решивших задачу 1, составляет 94%.

Составим пропорцию $\frac{27500}{x} = \frac{100}{94}$, из которой найдем $x = \frac{27500 \cdot 94}{100}$ или x=25850.

Ответ: 25850 человек.

Пример 2(открытый банк заданий, прототип 77344).

Призерами городской олимпиады по математике стали 48 учеников, что составило 12% от числа участников. Сколько человек участвовало в олимпиаде?

Решение.

1-й способ.

Пусть в олимпиаде участвовали *x* человек. Тогда согласно условию задачи составим уравнение $\frac{12}{100} \cdot x = 48$, откуда найдем $x = \frac{4800}{12}$ или $x =$ 400.

2-й способ.

Примем x учеников. Принявших участие в олимпиаде, за 100%. Тогда 48 призеров олимпиады составляют 12%. Составим пропорцию $\frac{x}{48} = \frac{100}{12}$ и найдем $x = \frac{48 \cdot 100}{12}$ или x = 400.

Ответ: 400 человек.

Задачи для самостоятельного решения.

1) В городе **N** живёт 600 000 жителей. Среди них 15% детей и подростков. Среди взрослых 45% не работает (пенсионеры, домохозяйки, безработные). Сколько взрослых работает?

2) Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 8 килограммов изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды?

3) Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 112%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 3%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

4) Жирность молока составляет 5%, а сметаны — 25%. Сколько килограммов сметаны можно получить из 400 кг молока?

2.2 Пропорциональное деление величины

- Чтобы разделить число А на части, прямо пропорциональные данным числам a,b,c (разделить в данном отношении a:b:c), надо разделить это число на сумму данных чисел и результат умножить на каждое из них:

$A_a = \frac{Aa}{a+b+c}$, $A_b = \frac{Ab}{a+b+c}$, $A_c = \frac{Ac}{a+b+c}$, отметим, что $A_а+A_в+A_с=A$.

- Чтобы разделить число А на части, обратно пропорциональные данным числам a,b,c, надо разделить это число на части, прямо пропорциональные числам $\frac{1}{а},\frac{1}{в},\frac{1}{с}$.

-Пусть требуется найти, *в каком процентном соотношении находятся числа* **а,в** и **с.** В этом случае необходимо определить, какой процент составляет каждое число по отношению к сумме этих чисел. Пусть k_a, k_b, k_c - искомые проценты, тогда:

$k_a = \frac{a}{a+b+c} \cdot 100$; $k_b = \frac{b}{a+b+c} \cdot 100$; $k_c = \frac{c}{a+b+c} \cdot 100$.

Отметим, что $k_a + k_b + k_c = 100\%$.

Пример 1 (Открытый банк заданий, прототип 99570).

Митя, Антон и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200 000 рублей. Митя внес 14% уставного капитала, Антон – 42 000 рублей, Гоша – 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1 000 000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях.

Решение:

1-й способ:

Митя внес 14% или 0,14 уставного капитала. Гоша внес 0,12 уставного капитала. Антон внес $\frac{42\ 000}{200\ 000} = 0{,}21$ уставного капитала, а Борис внес 1 – 0,21 – 0,14 – 0,12 = 0,53 уставного капитала.

Из прибыли размером в 1 000 000 рублей Борис получит $0{,}53 \cdot 1\ 000\ 000 = 530\ 000$ рублей.

2-й способ:

Митя внес 14% уставного капитала, Антон - $\frac{42\ 000}{200\ 000} \cdot 100\% = 21\%$ уставного капитала, Гоша $0{,}12 \cdot 100\% = 12\%$ уставного капитала. Тогда Борис внес 100% - 14% - 12% - 21% = 53% уставного капитала. Из прибыли размером в 1 000 000 рублей Борис получит $0{,}53 \cdot 1\ 000\ 000 = 530\ 000$ рублей.

Ответ: 530 000 рублей.

Пример 2.

Три фирмы затратили на выполнение работы 740 000 рублей. Этот расход они распределили так, что каждый внес сумму денег, обратно пропорциональную расстоянию его места объекта до работы. Первая фирма расположена в 4 км, вторая – в 5 км и третья – в 6 км от объекта. Сколько рублей должна уплатить за работу каждая фирма?

Решение:

Фирма должна разделить затраты прямо пропорционально числам $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$. По свойству отношений имеем: $\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6} = \left(60 : \frac{1}{4}\right) : \left(60 : \frac{1}{5}\right) : \left(60 : \frac{1}{6}\right) = 15 : 12 : 10.$

Первая фирма должна уплатить

$\frac{15}{15+12+10} \cdot 740\ 000 = 300\ 000$ рублей;

вторая фирма должна уплатить

$\frac{12}{15+12+10} \cdot 740\ 000 = 240\ 000$ рублей;

третья фирма должна уплатить

$\frac{10}{15+12+10} \cdot 740\ 000 = 200\ 000$ рублей.

Ответ: 300 000 рублей; 240 000 рублей; 200 000 рублей

Задачи для самостоятельного решения

1) Фонды оплаты труда четырёх отделов компании соотносятся друг с другом как 2:5:6:3. Определите величину фондов оплаты труда каждого отдела, если суммарный фонд оплаты труда компании равен 64 млн рублей.

2) Разделите наследство в 750000 рублей между тремя братьями так, чтобы на каждые 16 рублей, полученных старшим братом, приходилось 7 рублей, полученных средним, и 1 рубль, полученный младшим.

3) Курсы иностранных языков арендуют **в** школе помещения для занятий. **В** первом квартале за аренду четырёх **классных** комнат по 6 дней **в** неделю школа получала 3360 рублей **в месяц. Какой** будет арендная плата за месяц во втором квартале за пять классных комнат по 4 дня в неделю при тех же условиях?

4) В целях стимулирования продаж магазин установил 5%-ную скидку на каждую пятую продаваемую посудомоечную машину и 15%-ную на каждую двенадцатую продаваемую посудомоечную машину. В случае если на одну посудомоечную машину выпадают обе скидки, то применяется большая из них. Всего в ходе рекламной акции было продано 500 посудомоечных машин. Определите выручку магазина от продажи партии посудомоечных машин, если цена одной посудомоечной машины составляет 12000 рублей.

2.3 Процентное изменение величины.

Задачи на процентное изменение величины уже нельзя отнести к простейшим. Они решаются в несколько действий. В большинстве случаев эти задачи удобно решать с помощью формул.

В данном пункте можно выделить три задачи (прямая и две обратные), которые имеются в задании № 1 КИМов.

Пусть в задаче требуется определить число a, большее числа b на p%.

Это условие записывают формулой $a = b + \frac{p}{100} \cdot b$ или кратко $a = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot b$.

В случае, если число a меньше числа b на p%, используется формула $a = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot b$.

- ✓ Пусть некоторая величина А, меняющаяся со временем, имеет в начальный момент значение A_0, а через известный промежуток времени t_1 значение A_1. Обозначим процентный «прирост» (увеличение или уменьшение) величины А через p%. Для нахождения A_1 через A_0 и p используются формулы:

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_0\left(1 + \frac{\mathrm{p}}{100}\right) \text{ или } \mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_0\left(1 - \frac{\mathrm{p}}{100}\right)$$

- ✓ Обратная задача на нахождение A_0 через A_1 и p решается по формулам:

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_1 : \left(1 + \frac{\mathrm{p}}{100}\right) \text{ или } \mathrm{A}_0 = \mathrm{A}_1 : \left(1 - \frac{\mathrm{p}}{100}\right)$$

- ✓ Формулы процентного «прироста»:

  a) при увеличении величины А: $\mathrm{p} = \frac{\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_0}{\mathrm{A}_0} \cdot 100(\%)$

  b) при уменьшении величины А: $\mathrm{p} = \frac{\mathrm{A}_0 - \mathrm{A}_1}{\mathrm{A}_0} \cdot 100(\%)$.

Последние формулы можно прочитать так: из большего числа вычитаем меньшее число и делим на исходное число, затем умножаем на 100 и ставим знак процента.

Пример 1 (Открытый банк заданий, прототип 77353).

В сентябре 1 кг слив стоил 60 рублей. В октябре сливы подорожали на 25%. Сколько рублей стоил 1 кг слив после подорожания в октябре?

Решение:

1-способ.

1) 1 кг слив подорожал в октябре на $0{,}25 \cdot 60 = 15$ рублей.

2) Цена 1 кг слив в октябре составила 60 + 15 = 75 (руб)

Краткая запись решения: $60(1 + 0{,}25) = 60 \cdot 1{,}25 = 75$.

2-способ.

Можно решить задачу с помощью пропорции:

Пропорцией называют равенство двух отношений. А отношением называют частное двух чисел.

Примем цену слив в сентябре в 60 рублей за 100%. Тогда цена слив в октябре в x рублей составляет 100 + 25 = 125%. Составим пропорцию $\frac{60}{x} = \frac{100}{125}$, из которой найдем $x = \frac{60 \cdot 125}{100} = 75$.

Следовательно, искомая величина составляет 75 рублей.

Ответ: 75 рублей.

Пример 2 (Открытый банк заданий, прототип 26644).

Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Татьяна Николаевна получила 9570 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Татьяны Николаевны?

Решение:

1-й способ.

Пусть заработная плата составляет x рублей. Тогда согласно условия задачи составим уравнение $x - 0{,}13 \cdot x = 9570$

$x(1 - 0{,}13) = 9570$

$x = \frac{9570}{1 - 0{,}13}$

x = 11 000

2-й способ.

Примем заработную плату Татьяны Николаевны в x рублей за 100%. Тогда Татьяна Николаевна после удержания налога получает на руки 9570 рублей, которые составляют 100 – 13 = 87(%). Составим пропорцию и решим ее:

$x - 100\%$

9570 – 87%

$\frac{x}{9570} = \frac{100}{87}$

$x = \frac{9570 \cdot 100}{87} = 11\,000$

Ответ: 11 000 рублей.

Пример 3 (Открытый банк заданий, прототип 26630)

Футболка стоила 800 рублей. После снижения цены она стала стоить 680 рублей. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

Решение:

1-й способ.

Пусть а – часть, на которую была снижена цена футболки. Тогда согласно условию задачи составим уравнение 800 – 800а = 680 или сразу по формуле 800(1 – а) = 680.

Решаем и получаем

$1 - a = \frac{680}{800}$;

1 – а = 0,85;

а = 0,15

2-й способ.

Примем стоимость футболки в 800 рублей за 100%. Тогда после снижения цены стоимость футболки в 680 рублей составит х%. составим пропорцию $\frac{800}{680} = \frac{100}{x}$; $x = \frac{680 \cdot 100}{800} = 85$. Значит, цена футболки снижена на 100 – 85 = 15 (%).

3-й способ.

По формуле процентного «прироста» находим искомую величину $p = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100(\%)$.

$\frac{800-680}{800} \cdot 100 = 15(\%)$

Ответ: 15%.

Это полезно знать.

Полезно понимать разные формы выражения одного и того же изменения величины, сформулированные без процентов и с помощью процентов.

Например, в сообщениях «заработная плата бюджетникам с января повышена на 50%» и «заработная плата бюджетникам с января повышена в 1,5 раза» говорится об одном и том же. Точно так же, увеличить в 2 раза - это значит увеличить на 100%, увеличить в 3 раза- значит на 200%, уменьшить в 2 раза- значит уменьшить на 50%.

Следует запомнить:

1) Если значение a выросло на p%, то новое значение будет
$a + \frac{p}{100} \cdot a = \left(1 + \frac{p}{100}\right) a$
2) Если значение c уменьшилось на p%, то новое значение будет $c - \frac{p}{100} \cdot c = \left(1 - \frac{p}{100}\right) c$
3) Если A больше B на p%, то $A = B + \frac{p}{100} B;$
$\boxed{A = \left(1 + \frac{p}{100}\right) B}$
Выразим из последней формулы p:
$(1+ \frac{p}{100}) = \frac{A}{B};$ $\frac{p}{100} = \frac{A}{B} - 1;$ $\frac{p}{100} = \frac{A-B}{B};$
$$\boxed{p = \frac{A - B}{B} \cdot 100(\%)}$$
Эта формула даёт ответ на вопрос: **на сколько процентов** A больше, чем B.
4) Если B меньше A на q%, то
$B=A- \frac{q}{100}A;$ $\boxed{B = \left(1 - \frac{q}{100}\right) A;}$
Если требуется ответить на вопрос: на сколько процентов B меньше, чем A, то из последней формулы, выразив q, получим
$$\boxed{q = \frac{A - B}{A} \cdot 100(\%)}$$
Внимательный читатель заметил, что если A больше, чем B на p%, то **это не означает**, что B меньше A на p%. Убедимся в этом высказывании ещё раз, решив следующую **задачу:**
В классе мальчиков на 25% больше, чем девочек. На сколько процентов девочек в этом классе меньше, чем мальчиков?

Читая данную задачу можно сразу дать ответ: на 25%. Но это не так.

Решение:

Пусть м- количество мальчиков, d- количество девочек; (м, d ∈ N);

$25\%= \frac{1}{4}$

По условию м = d+ $\frac{1}{4}d;$ м= $\frac{5}{4}d$

Тогда d= $\frac{4}{5}$м; d=(1- $\frac{1}{5}$)м; d=м- $\frac{1}{5}$м; $\frac{1}{5}$ =20%

Ответ: девочек на 20% в классе меньше.

Задачи для самостоятельного решения

1) На острове Мамба-Тамба в результате инфляционных процессов цены выросли на 200%. Оппозиция потребовала от правительства возвращения цен к прежнему уровню. На сколько процентов должны быть уменьшены цены?
2) Магазин продаёт обувь по цене "А", а закупает её на обувной фабрике по цене, составляющей 75% от цены "А". Сколько процентов (с точностью до десятых долей процента) составляет торговая наценка магазина?
Наценка — это процент превышения розничной цены продажи над оптовой ценой закупки товара.
3) В январе стоимость проезда в автобусе составила 18 рублей, а в феврале — 20 рублей. На сколько процентов (с точностью до десятых долей процента) повысилась стоимость проезда в феврале?
4) Антикварный магазин, купив два предмета за 450 тысяч рублей, продал их, получив 40% прибыли. Какую цену заплатил магазин за каждый предмет, если на первом прибыли было получено 25%, а на втором 50%?
5) Банк выплачивает своим вкладчикам 6% годовых и даёт ссуды заёмщикам под 15% годовых. Чему равна банковская прибыль за год, если банк привлёк 20 млн рублей средств вкладчиков на год и выдал заёмщикам ссуд в 5 млн рублей на год?

2.4 Проценты и соотношения между величинами.

В некоторых задачах величины связаны формулой и необходимо ответить на вопрос, как процентное изменение одних величин влияет на процентное изменение других велечин.

Пример 1. За некоторый период времени у господина Иванова количество акций увеличилось на 15%. На сколько процентов увеличилась общая стоимость акций господина Иванова, если цена каждой акции увеличилась на 20%?

Решение. Пусть S_0 – цена одной акции, n – количество акций, $S_0 \cdot n$ – общяя стоимость акций. Эти величины связаны формулой $S = S_0 \cdot n$.

Составим таблицу:

	Цена одной акции	**Количество акций**	**Общая стоимость**
Было	S_0	n	$S_0 \cdot n$
Стало	$1{,}2S_0$	1,15n	$1{,}38S_0 \cdot n$

Можно сразу сделать вывод: общая стоимость акций S увеличилась в 1,38 раз, поэтому стоимость акций увеличилась на 38%.

Или, используя формулу процентного «прироста», находим искомую величину:

$$\frac{1{,}38\,S_0 n - S_0 n}{S_0 n} \cdot 100 = 38(\%).$$

Ответ: 38%.

Пример 2. Производительность труда рабочего при выполнении определенной работы увеличилась на 25%. На сколько процентов сократилось время для выполнения этой работы?

Решение. Пусть А- объем работы, N – производительность труда рабочего, t – время работы. Время работы определяется t = $\frac{A}{N}$. Составим таблицу:

	Работа	**Производительность**	**Время**
Было	А	N	$\frac{A}{N}$
Стало	А	1,25N	$\frac{A}{1,25N}$ =0,8·$\frac{A}{N}$

Можно сразу сделать вывод: новое время работы составило 80% от старого времени, следовательно, оно сократилось на 20%.

Или, используя формулу процентного «прироста», находим искомую величину:

$$\frac{\frac{A}{N}-0,8\cdot\frac{A}{N}}{\frac{A}{N}}\cdot 100 = 20(\%).$$

Ответ: 20%.

Рассмотрим более сложную задачу на соотношения между величинами.

Пример 3. Имеется три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. р. до 20 тыс. р., а цена акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. р. и не больше 60 тыс. р. Определите, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

Будем считать, что общая стоимость акций фиксирована.

Давайте для начала введем переменные:

	Первый пакет	Второй пакет	Третий пакет

Количество акций	n	m	n+m
Стоимость акций	x	y	z

Тогда стоимость первого пакета акций равна nx, второго my, третьего (n+m)z.

Теперь внимательно читаем задачу:

1. ***Первый пакет в 4 раза дешевле второго,*** следовательно**,**
4nx = my.

2. ***Суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета,*** следовательно**,** 4nx + my = (n+m)z .

3. ***Одна акция из второго пакета дороже одной акции из из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. р. до 20 тыс.р.***,

следовательно, 16$\leq y - x \leq 20$.

4. ***Цена акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. р. и не больше 60 тыс. р.,***

следовательно, 42$\leq z \leq 60$.

Получили систему условий:

$$\begin{cases} 4nx = my \\ nx + my = z(n+m) \\ 16 \leq y - x \leq 20 \\ 42 \leq z \leq 60 \end{cases}$$

В первую очередь разберемся с неравенствами.

По условию задачи нам нужно найти, ***какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.***

Этот процент равен $\frac{n}{n+m+(n+m)} \cdot 100\% = \frac{n}{2(n+m)} \cdot 100\%$

Сначала найдем при каких условиях этот процент будет **наименьшим**. ***Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете.*** Поэтому чем меньше акций в третьем пакете, тем меньше суммарное количество акций

в первых двух пакетах. Акций в третьем пакете тем меньше, чем больше их стоимость. Следовательно, чтобы получить наименьший процент акций из первого пакета, мы должны взять наибольшую стоимость акций из третьего, то есть берем
z = 60.

Далее. Чем дешевле акции из второго пакета, тем их больше, и тем меньше остается акций в первом пакете (суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете). Следовательно, разность между стоимостью акции из первого пакета и акции из второго пакета должна быть наименьшей. Поэтому берем

y – x = 16.

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 4nx = my \\ nx + my = z(n+m) \\ y - x = 16 \\ z = 60 \end{cases}$$

В этой системе 4 уравнения и 5 неизвестных, поэтому мы не можем найти значение каждой неизвестной величины. Но мы можем найти их соотношение. Для этого вернемся вернемся к вопросу задачи. Нам нужно найти значение выражения $\frac{n}{2(n+m)} \cdot 100\%$ **(1)**

Рассмотрим дробь $\frac{n}{2(n+m)}$.

Обратная ей дробь равна $\frac{2(n+m)}{n} = 2 + 2\frac{m}{n}$

То есть если мы найдем отношение $\frac{m}{n}$, то задача будет решена.

Из первого, второго и четвертого уравнений системы получим $5nx = 60(n+m)$ **(2)**

Из третьего уравнения выразим **y** через **x**, получим y = x + 16. Подставхтим это выражение для **y** в первое уравнение и выразим **x** через **n** и **m**:

$$4nx = m(x+16)$$

$$4nx = mx + 16m$$

$$4nx - mx = 16$$

$$x(4n - m) = 16m$$

$$x = \frac{16m}{4n - m}$$

Подставим это выражение для **x** в уравнение **(2)**. Получим:

$$5n \cdot \frac{16m}{4n - m} = 60(n + m)$$

Разделим обе части равенства на 20 и умножим на **4n - m**. Получим:

$$4mn = 3(n + m)(4n - m)$$

Раскроем скобки, приведем подобные члены и перенесем слагаемые в одну сторону, получим:

$$3m^2 - 5mn - 12n^2 = 0$$

Разделим обе части равенства на $\mathbf{n^2}$, и решим квадратное уравнение относительно $\frac{m}{n}$:

$$3\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 5\frac{m}{n} - 12 = 0$$

Получим 2 значения: $\frac{m}{n} = -\frac{4}{3}$ $и$ $\frac{m}{n} = 3$

Так как **n** и **m** – натуральные числа, нам подходит только $\frac{m}{n} = 3$. То есть m = 3n. Подставим это соотношение в выражение **(1)**:

$$\frac{n}{2(n + m)} \times 100\% = \frac{n}{8n} \times 100\% = 12{,}5$$

Итак, ***наименьший процент от общего количества акций, который может содержаться в первом пакете равен 12,5%.***

Аналогичным образом найдем ***наибольший процент от общего количества акций, который может содержаться в первом пакете.***

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4nx = my \\ nx + my = z(n+m) \\ yx = 20 \\ z = 42 \end{cases}$$

Из первого, второго и четвертого уравнений получим $5nx = 42(n+m)$ **(3)**

Из третьего уравнения выразим **y** через **x** получим **y = x +20**. Подставим это выражение для **y** в первое уравнение и выразим **x** через **n** и **m**. Получим:

$$x = \frac{20}{4n - m}.$$

Подставим это выражение для **x** в уравнение **(3)**. Получим:

$$5n \times \frac{20m}{4n - m} = 42(n+m)$$

Разделим обе части равенства на 2 и умножим на **4n - m**.

Получим: $50mn = 21(n+m) \cdot (4n - m)$

Раскроем скобки, приведем подобные члены и перенесем слагаемые в одну сторону, получим:

$$84n^2 + 13mn - 21m^2 = 0$$

Разделим обе части равенства на $\mathbf{n^2}$, умножим на -1 и решим квадратное уравнение относительно $\frac{m}{n}$:

$$21\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 13\frac{m}{n} - 84 = 0$$

Получим 2 значения: $\frac{m}{n} = -\frac{12}{7}$ u $\frac{m}{n} = \frac{7}{3}.$

Так как **n** и **m** – натуральные числа, нам подходит только $\frac{m}{n} = \frac{7}{3}$. То есть m =$\frac{7}{3}n$. Подставим это соотношение в выражение **(1)** :

$$\frac{n}{2(n+m)} \times 100\% = \frac{n}{2(n+\frac{7}{3}n)} \times 100\% = \frac{3}{20} \times 100\% = 15\%$$

Итак, ***наибольший процент от общего количества акций, который может содержаться в первом пакете равен 15%.***

***Ответ*: 12,5% и 15%**

Задачи для самостоятельного решения

1. Объем промышленной продукции увеличился в 5 раз. На сколько процентов произошло увеличение?
2. После перехода на новое оборудование затраты электроэнергии снизились на 16%, а выпуск изделий вырос на 50%. На сколько процентов уменьшилось количество электроэнергии, расходуемое на производство одного изделия?
3. Цветной телевизор два месяца назад стоил на 20% дешевле, чем месяц назад, когда он стоил на 10% дешевле, чем сейчас. На сколько процентов дешевле стоил телевизор два месяца назад, чем сейчас?

2.5 *Формула простых процентов*

В зависимости от способа начисления процентов (от выбора базы начисления) выделяют два основных вида процентов: *простые* и *сложные.*

Если величина А через равные промежутки времени t_1 имеет процентный прирост р только на первоначальное значение A_0, то в момент времени $t_n = nt_1$ её значение A_n будет равно:

$A_n = A_0(1 + \frac{pn}{100})$ – формула простых процентов.

Формулу простых процентов используют, например, при начислении штрафов. Также удобно применять начисление простых процентов тогда, когда по истечении каждого года вкладчик снимает со своего счета проценты, начисленные за этот год.

С приведенной формулой связаны четыре задачи: прямая задача и три обратные.

Пример 1. Занятия ребенка в музыкальной школе родители оплачивают в Сбербанке, внося ежемесячно 250 рублей. Оплата должна производиться до 15-го числа каждого месяца, после чего за каждый просроченный день начисляется пеня в размере 4% от суммы оплаты занятий за один месяц. Сколько денег придется заплатить родителям, если они просрочат оплату на неделю?

Решение. Так как по условию задачи $A_0 = 250$, $p = 4$, $n = 7$, то по формуле простых процентов находим искомую величину $A_7 = 250(\ 1 + \frac{4 \cdot 7}{100}) = 320$(руб.).

Ответ: 320 рублей.

Пример 2. Какую сумму положили в банк под простые проценты по ставке 22% годовых, если через пять лет вклад достиг 94 500 рублей?

Решение. По условию задачи $A_5 = 94\ 500$, $p = 22$, $n = 5$, тогда, используя формулу простых процентов, получим уравнение: $94\ 500 = A_0(\ 1 + \frac{22 \cdot 5}{100}\ )$.

Отсюда находим $A_0 = 94\ 500 : 2{,}1 = 45\ 000$(руб.).

Ответ: 45 000 рублей.

Пример 3. Сколько лет лежал в банке вклад 70 000 рублей, если по ставке 19,2 % годовых простых процентов он достиг величины 150 640 рублей?

Решение. По условию задачи $A_0 = 70\ 000$, $A_n = 150\ 640$, $p = 19{,}2$. Если вклад пролежал n лет, то получаем уравнение: $150\ 640 = 70\ 000(\ 1 + \frac{19{,}2 \cdot n}{100}\ )$, то есть

$1 + \frac{19{,}2 \cdot n}{100} = 2{,}152$. Отсюда следует : $19{,}2n=214{,}2$; $n = 6$.

Ответ: 6 лет.

Пример 4. Какую годовую ставку простых процентов выплачивает банк, если вклад 12 000 рублей через 3 года достиг величины 14 160 рублей?

Решение. По условию задачи $A_0 = 12\ 000$, $A_3 = 14\ 160$, $n = 3$. Получаем уравнение:

$14\ 160 = 12\ 000(\ 1 + \frac{p \cdot 3}{100})$. Отсюда $1 + \frac{3\ p}{100} = 1{,}18$; $3\ p = 18$; $p=6(\%)$.

Ответ: 6%.

Задачи для самостоятельного решения

1. Какую сумму положили в банк под простые проценты по ставке 27% годовых, если за 4 года вклад вырос на 167 400 рублей?
2. Известно, что банк начисляет простые проценты по ставке 25% годовых. Определите минимальное число лет, по истечении которых первоначальный вклад увеличится в 2 раза?
3. Определите годовую процентную ставку (банк начисляет простые проценты), если первоначальный вклад величиной 23 500 рублей за 6 лет увеличился на 38 070 рублей?

2.6 ***Формула сложных процентов***

Согласно статистике, почти каждая семья берет кредит на приобретение того или иного товара! В сегодняшние дни потребительские кредиты, кредитные карты, автокредиты, ипотека, вклады, банковские карты и другие финансовые услуги очень распространены и играют важную роль в экономике страны и каждой семьи.

Если величина А через равные промежутки времени t_1 будет иметь процентный прирост p и процент будет начисляться на измененную величину, то в момент времени

$t_n = nt_1$ её значение A_n будет равно:

$$A_n = A_0\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^n \text{ – формула сложных процентов,}$$

где знак «+» или «-» ставятся в соответствии с тем, к чему приводит «прирост» - к увеличению или уменьшению величины.

Приведем примеры прямой и обратных задач на применение формулы сложных процентов.

Пример 1. Один из видов срочных вкладов предусматривает начисление 9% прибыли через год хранения денег в банке. Если спустя этот срок счет не закрывается, то договор автоматически продлевается на тех же условиях (пролонгируется). Какая сумма будет на счету через 3года при первоначальном вкладе 17 000 рублей и при той же процентной ставке? Результат (в рублях) округлите до десятых.

Решение. По условию задачи A_0 = 17 000, p = 9, n = 3, тогда искомая величина равна

$$A_3 = 17\,000 \cdot \left(1 \pm \frac{9}{100}\right)^3 = 22\,015{,}493 \approx 22\,015,\ 5(\text{руб.}).$$

Ответ: 22 015,5 рублей.

Пример 2 (открытый банк заданий, прототип 99569). Цена холодильника ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года он был продан за 15 842 рубля.

Решение. Пусть a – часть, на которую каждый год уменьшалась цена холодильника. Используя формулу сложных процентов, составим и решим уравнение:

$20\,000\cdot(1-a)^2 = 15\,842$; $(1-a)^2 = \frac{15\,842}{20\,000}$; $(1-a)^2 = 0{,}7921$;

$(1-a)^2 = (0{,}89)^2$; $1-a = 0{,}89$ $(1-a > 0)$; $a = 0{,}11$.

Следовательно, цена холодильника ежегодно уменьшалась на $0{,}11\cdot 100 = 11(\%)$.

Ответ: 11%

Пример 3. Начальный капитал акционерного общества составляет 15 миллионов рублей. Ежегодно капитал увеличивается на 25%. Найдите минимальное количество лет, после которых капитал акционерного общества превысит 45 миллионов рублей.

Решение. Применяя формулу сложных процентов, получаем неравенство

$15(1+0{,}25)^n > 45$; $1{,}25^n > 3$, где через n обозначено искомое количество лет. Так как $1{,}25^4 < 3$, а $1{,}25^5 > 3$, то $n = 5$.

Ответ: 5 лет.

Задачи для самостоятельного решения

1. В банк внесен вклад 64 000 рублей на 3 года. Определите ставку процента, если через 3 года на счету вкладчика оказалось 216 000 рублей.
2. Известно, что ставка банковского процента равна 25%. Определит, через сколько лет начальный вклад 216 000 рублей возрастет до 421 875 рублей.
3. Цена некоторого товара снижается ежегодно на 10%. На сколько процентов по сравнению с первоначальной снизится стоимость товара через четыре года?

2.7 ***Обобщенная формула сложных процентов.***

У многих наверняка возникнет вопрос, а к чему вообще все эти сложности, нельзя ли просто расписать каждый год в табличке, как это делают во многих учебниках, посчитать отдельно каждый год, а затем посчитать общую сумму вклада? Конечно, можно вообще забыть про сумму геометрической прогрессии и все считать с помощью классических табличек — так сделано в большинстве сборников для подготовки к ЕГЭ. Однако, во-первых, резко увеличивается объем вычислений, а во-вторых, как следствие, увеличивается вероятность допустить ошибку.

Если величина A за время t_1 имеет процентный прирост $p_1\%$, на следующем этапе за время $t_2 - t_1$(не обязательно равное t_1) - $p_2\%$, далее за время $t_3 - t_2$ - $p_3\%$, и т.д. , то в момент t_n её значение A_n будет равно:

$$A_n = A_0\left(1 \pm \frac{p1}{100}\right)\left(1 \pm \frac{p2}{100}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1 \pm \frac{pn}{100}\right)$$

где знак «+» или «-» в каждом множителе ставятся в соответствии с тем, к чему приводит «прирост» - к увеличению или уменьшению величины.

С приведённой формулой связаны три задачи (прямая и две обратные), которые представлены в задании №11 контрольно-измерительных материалов.

Пример 1 **(Открытый банк заданий, прототип** 99565). В 2008 году в городском квартале проживало 40 ООО человек. В 2009 году в результате строительства новых домов число жителей выросло на 8%, а в 2010 году — на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

Решение. Используя формулу сложных процентов, находим, что в 2010 году в квартале стало проживать

$$40000 \cdot (1 + 0{,}08) \cdot (1 + 0{,}09) = 40000 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}09 = 47088 \text{ человек.}$$

Ответ: 47 088 человек.

Пример 2. Зарплата служащего составляла 2000 денежных единиц (д.е.). Зарплату повысили на 20%, а вскоре понизили на 20%. Изменилась ли первоначальная зарплата служащего, и если да, то на сколько денежных единицах она изменилась?

Решение. Так как 20% = 0,2, то по обобщённой формуле сложных процентов находим новую зарплату служащего:

$$2000(1 + 0{,}2)(1 - 0{,}2) = 1920.$$

Следовательно, его зарплата уменьшилась на 2000 - 1920 = 80 (д.е.).

Замечание. Поскольку (1 + 0,2) (1 - 0,2) = 0,96, то сразу видно, что зарплата уменьшилась на 4%, что в денежном выражении составило 80 д.е.

Ответ: уменьшилась на 80 д.е.

Пример 3. Зарплата служащего составляла 2000 денежных единиц (д.е.) Зарплату понизили на 20%, а вскоре повысили на 20%. Сколько денег стал получать служащий?

Решение. Так как 20% = 0,2, то используя формулу обобщённых сложных процентов, находим новую зарплату служащего:

$$2000(1 - 0{,}2)(1 + 0{,}2) = 1920.$$

Ответ: 1920д.е.

Замечание. Сравните примеры 24 и 25 и сделайте вывод.

Пример 4 (Открытый банк заданий, прототип 99566). В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

Решение. Пусть $x > 0$ — первоначальная стоимость акций, а $\boldsymbol{a} > 0$ — часть стоимости, на которую в понедельник подорожали, а во вторник подешевели акции. Используя формулу сложных процентов, составим и решим уравнение:

$x \cdot (1 + a) \cdot (1 - a) = x(1 - 0{,}04);$

$1 - a^2 = 1 - 0{,}04;$

$a^2 = 0{,}04;$ $\boldsymbol{a} = 0{,}2.$

Итак, в понедельник акции подорожали на $0{,}2 \cdot 100 = 20$ (%).

Ответ: 20%.

Пример 5. Выработка продукции предприятия за первый год работы возросла на *p%,* а за следующий год по сравнению с первоначальной возросла на 10 процентных пунктов по сравнению с первым годом. Определите, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59%?

Решение. Обозначим через V_0 исходный годовой объём выработки предприятия. Тогда, объём годовой выработки через год V_1 выражается формулой

$V_1 = V_0\left(1 + \frac{P}{100}\right)$, объём годовой выработки через два года V_2 - формулой

$$V_2 = V_1\left(1 + \frac{P+10}{100}\right) = V_0\left(1 + \frac{P}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{P+10}{100}\right)$$

Согласно условию $V_2 = V_0\left(1 + \frac{48.59}{100}\right)$. Приравнивая правые части двух последних формул,

получаем квадратное уравнение $p^2 + 210p - 3859 = 0$, из которого находим единственный положительный корень $p = 17$. Следовательно, за первый год выработка увеличилась на 17%.

Ответ: ***17%.***

Пример 6. Иванов сделал открытие, позволяющее экономить 30% топлива, а Петров — 70%. Сколько процентов топлива можно сэкономить, применяя оба эти изобретения? (Применение одного изобретения не влияет на эффективность другого.)

Решение. Пусть взято $\boldsymbol{a}$ кг топлива. После применения первого изобретения расход топлива составит $a(1-0{,}3) = 0{,}7a$(кг). После применения второго изобретения расход топлива будет

$0{,}7a(1 - 0{,}7) = 0{,}21a$ (кг).

Значит, экономия составит

$$\frac{a - 0{,}21a}{a} \cdot 100\% = 79(\%)$$

Краткая запись: $\frac{a - a(1-0{,}3)(1-0{,}7)}{a} \cdot 100 = 79\%$.

Ответ: 79%.

Задачи для самостоятельного решения

1) В течение января цена на яблоки выросла на 20%, а в течение февраля — на 30%. На сколько процентов поднялась цена за 2 месяца?
2) Изобретение Иванова даёт экономию 40%, Петрова — 30%, а Сидорова — 20%. Сколько процентов составит общая экономия? (Применение одного изобретения не влияет на эффективность других.)
3) Пётр открыл вклад «Сюрприз» на три года. Договор предусматривает следующую схему начисления процентов: за первый год — 8%, в каждом следующем году ставка повышается на 4 процентных пункта. Определите, на сколько процентов вырастет вклад Петра за три года.
4) По оценкам экспертов цена новой модели сотового телефона снижается за первый год на 15%, за второй — на 10%, за третий — на 5%. Сколько будет стоить через три года сотовый телефон, начальная цена которого равнялась 250 евро?

2.8 ***Задачи на оптимизацию.***

Не так давно в вариантах ЕГЭ появились текстовые задачи, в которых необходимо найти наименьшее или наибольшее значение некоторой величины. При решении большинства этих задач применяется производная. Для их решения нужно:

1. Составить функцию, которую необходимо оптимизировать.
2. Найти ее производную.
3. Приравнять к нулю, чтобы выявить критические точки. В них функция принимает наименьшее или наибольшее значения.
4. Подставив найденные значения в функцию, получим ответ задачи.

Рассмотрим примеры решения некоторых из них.

1. *В двух шахтах города Норильска добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля.*

Обе шахты поставляют добытый металл на металлургический завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести ***наибольшее*** *количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?*

Решение:

		Количество рабочих	Добыча за 1 час
1 шахта	никель	x	3x
	алюминий	100-x	1·(100-x)
2 шахта	никель	y	1·y
	алюминий	300-y	3·(300-y)

Так как в промышленности для сплава нужно в 2 раза больше алюминия, чем никеля, и на обоих шахтах работают по 5 часов в день, то $5(1\cdot(100-x)+3\cdot(300-y))=5(2(3x+1y))$. После преобразований получим: $y=200-1{,}4x$. Функция выпуска сплава $m(x,y)=5(3x+(100-x)+y+3(300-y))$. Подставим y, тогда $m(x)=3000+24x$. Поскольку $x\leq100$, то максимальное значение $m(x)=5400$ достигается при $x=100$

Ответ: 5400 кг сплава будет ежедневно выпускать промышленность.

2**.** *В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металла так, чтобы завод мог* *произвести **наибольшее** количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?*

Решение: В первой области 50 рабочих отработают 500 часов в сутки. Пусть **z** человек выпускают алюминий. Количество металла, выпущенное в первой области $z \cdot 0,2 + (500 - z) \cdot 0,1$ кг.

А во второй области так же 500 человеко-часов и по условию задачи

$x^2 + y^2 = 500$, т.е. $x^2 = 100$, $y^2 = 400$;

$x = 10$, $y = 20$.

10 кг алюминия и 20 кг никеля добывают во второй области.

Так как никеля выпускают в 2 раза больше,

то $2(0,2z + 10) = 50 - 0,1z + 20$,

$0,4z + 20 = 70 - 0,1z$,

$0,5z = 50$,

$z = 100$.

$S(z) = 0,2z + 50 - 0,1z + 30$.

$S(100) = 0,2 \cdot 100 + 50 - 0,1 \cdot 100 + 30 = 20 + 50 - 10 + 30 = 70 + 20 = 90$.

Ответ: 90 кг сплава сможет произвести завод за сутки.

3. В январе 2014 года ставка по депозитам в банке «ВТБ» составляла x % годовых, тогда как в январе 2015 года — y % годовых, причем известно, что x+y=30%. В январе 2014 года вкладчик открыл счет в банке «ВТБ», положив на него некоторую сумму. В январе 2015 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение x при котором сумма на счету вкладчика в январе 2016 года станет максимально возможной.

Решение*:* Пусть 1-первоначальный вклад. Тогда через год при x % годовых на счету окажется сумма $1\cdot(1+0,01x)$. Далее вкладчик снимает со счета пятую часть первоначальной суммы. То есть на счету оказывается сумма $1+0,01x-0,2=0,8+0,01x$. В банке меняется процентная ставка и составляет теперь y %, т.е (30-x) %. Тогда еще через год у вкладчика на счету окажется сумма $(0,8+0,01x)\ (1,3-0,01x)$. Нас интересует значение x, при котором значение $f(x) =(0,8+0,01x)\ (1,3-0,01x)$ будет максимальным. Исследуем данную функцию методами математического анализа или максимальное значение функция f(x) примет в точке x_0 (вершина параболы), то есть в точке $x_0 =25$.

Ответ: 25%.

4. *Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 21 квадратный метр и номера «люкс» площадью 49 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 квадратных метров. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?*

Решение: Пусть стандартных номеров –x, а номеров «люкс» -y. Тогда общая площадь будет: 21x+49y=1099 кв. метров. В сутки можно заработать: 2000x+4500y рублей и эта сумма должна быть наибольшей. Из первого уравнения выразим y и подставим в выражение 2000x+4500y. получим функцию заработанных в сутки денег: f(x)=2000x+4500$\cdot\frac{1099-21x}{49}$. После преобразований получим: f(x)= $\frac{500x+706500}{7}$. Она должна принимать наибольшее значение. Т.к. x и y –натуральные числа, и функция f(x)- возрастающая, то она принимает наибольшее значение при наибольшем значении x. Легко заметить, что выражение $\frac{1099-21x}{49} = \frac{157-3x}{7}$ будет целым, если x=50, тогда f(x) = $\frac{500\cdot 50+706500}{7}$ = 104500 (рублей).

Ответ: 104 500 рублей в сутки сможет заработать предприниматель на своем отеле.

5. *В поселке «Черная Речка» фермер выращивает картофель и свеклу на двух полях, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать обе культуры, и поля можно делить между ними в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц /га, а на втором – 200ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет - 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га.*
Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свеклу - по цене 13 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение: Пусть $\boldsymbol{x}$ га на первом поле отводится под свеклу, а $(10 – x)$ га отводится под картофель. С первого поля собирают $300(10 – x)$ ц картофеля и $200x$ ц свеклы. Пусть $\boldsymbol{y}$ га на втором поле отводится под свеклу, а $(10 – y)$ га отводится под картофель.
Со второго поля собирают $200(10 \cdot y)$ ц картофеля и $300\, y$ ц свеклы
Прибыль с первого поля (30 000 000 – 3 000 000x + 2 600 000x) руб., а прибыль со второго поля (20 000 000 – 2 000 000y + 3 900 000y) руб.
Функция прибыли с двух полей
S (x; y) = 1 900 000y – 400 000x + 50 000 000.

Наибольшее значение функции принимает при x = 0, а y = 10, тогда прибыль составит 69 000 000 руб.

Ответ: 69 000 000 рублей наибольший доход фермера.

6.Строительство цеха по производству вентиляционных труб стоит 39 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции в этом цехе равны $0,5x^2+4x+19$ млн. руб.в год. Если продукцию продать по цене а тыс. руб.за единицу, то прибыль фирмы (в млн. руб.) за один год составит $ax-(0,5x^2+4x+19)$. Когда цех будет построен, фирма «Дальвент» станет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении а строительство цеха окупится не более, чем за три года?

Решение: За три года прибыль составит: $3(ax-(0,5x^2+4x+19))$.Т.к. за это время должно окупиться строительство нового цеха, то эта прибыль должна быть не менее 39млн. руб. Т.е. $3(ax-(0,5x^2+4x+19)) \geq 39$. Выразим из этого неравенства а. После преобразований получим: $a\geq 0,5x+4+\frac{32}{x}$. Наименьшее значение $a=0,5x+4+\frac{32}{x}$. Будем находить это значение через производную.

$(0,5x+4+\frac{32}{x})'=0,5-\frac{32}{x^2}$. Найдем критическую точку: $0,5-\frac{32}{x^2}=0$. Отсюда x=8 (отрицательное значение не берем, т.к. x - натуральное число). Вычислим наименьшее значение $a = 0,5\cdot 8+4+\frac{32}{8} = 12$.

Ответ: а=12.

7. *В Хабаровске и в Благовещенске работают заводы по изготовлению кирпичей. В 2015 году на заводе в Хабаровске установили современное оборудование, поэтому рабочие этого завода суммарно трудятся t^2 часов в неделю и выпускают при этом 2t единиц продукции. Рабочие в Благовещенске трудятся суммарно t^2 часов, но выпускают t единиц продукции. Ставка заработной платы рабочего на обоих заводах составляет 500 рублей в час. А общая плата рабочим обоих заводов составляет 30250000 рублей в неделю. Какое максимальное количество единиц продукции в неделю могут выпускать оба завода?*

Решение:

	Суммарное количество часов	Объем продукции
Завод в Благовещенске	X^2	X
Завод в Хабаровске	$У^2$	2У
Оба завода вместе	$X^2+У^2$	X+2У

1. Общая плата рабочим в неделю составит: $500(X^2+У^2) = 30250000$. Или $X^2+У^2 = 60500$. (Таким образом, найдены ограничения на x и y)
2. Из этого уравнения выразим y. $У = \sqrt{60500 - x^2}$ и подставим в выражение: x+2y. Т.к. объем продукции должен быть максимальным, то необходимо найти при каком значении x, значение функции $f(x)= x+2\sqrt{60500 - x^2}$ принимает наибольшее значение.
3. Для этого найдем производную данной функции. Она равна:

$$f'(x)= (x+2\sqrt{60500 - x^2})' = 1- \frac{2x}{\sqrt{60500-x^2}}$$

4. Приравняем к нулю и найдем точку максимума.

$1- \frac{2x}{\sqrt{60500-x^2}} = 0$. После вычислений получим x = 110. Тогда y = 2· 110 = 220.

5. Вычислим максимальный объем продукции за неделю:

110+2·220=550

Ответ: 550 единиц товара.

8. В бассейне проведены три трубы. Первая труба наливает 20 м^3 воды в час, вторая труба наливает в час на 2z м^{3}меньше, чем первая (0<z <10)? Третья труба наливает в час на 10z м^3 больше первой. Сначала первая и вторая трубы, работая вместе, наливают 20% бассейна, а затем все три трубы, работая вместе, наливают оставшиеся 0,8 будет налит бассейна. При каком значении z бассейн быстрее всего наполнится указанным способом?

Решение: Примем объем бассейна за 1

	Работа (A)	Время (t)	Производительность (v) в м^3
1 труба			20
2 труба			20-2z
3 труба			20+10z
1 и 2 вместе		$\frac{0,2}{40-2z}$	20+(20-2z)=40-2z

1,2 и 3 вместе		$\frac{0,8}{60+8z}$	20+(20-2z)+(20+10z)= 60+8z

Весь бассейн будет налит за $\frac{0,2}{40-2z}$ +$\frac{0,8}{60+8z}$ часов. Задача сводится к нахождению такого значения z, при котором значение функции t(z) = $\frac{0,2}{40-2z}$ + $\frac{0,8}{60+8z}$, *0<z<10* будет наименьшим.

t'(z) = $0,4/((40-2z)^2$ - $6,4/((60+8z)^2$ = $\frac{0,4(60+8z)^2 - 6,4(40-2z)^2}{(40-2я)(60+8z)}$

t'(z) = 0, $\frac{0,4(60+8z)^2 - 6,4(40-2z)^2}{(40-2я)(60+8z)} = 0$

$0,4(60+8z)^2 - 6,4(40-2z)^2 = 0$

$(40-2я)(60+8z) \neq 0$

0<z<10

После вычислений получим: z=6,25- точка минимума. *0<6,25<10.*

Ответ: за 6,25 часа бассейн наполнится быстрее всего.

9. В лагерь 81 ребенка везут двумя автобусами по 40 и41 ребенку соответственно. Каждому ребенку в дорогу полагается ровно 1 пирожок. Имеется 38 пирожков с вишней и 43 пирожка с курагой. Как нужно распределить пирожки по автобусам, чтобы процентные содержания пирожков с вишней в автобусах (относительно общего количества пирожков в каждом автобусе) отличались минимально?

Решение: Пусть в первый автобус с количеством детей 40 человек нужно отдать x пирожков, тогда во второй автобус отдаем 38-x пирожков. В процентном отношении пирожки по автобусам распределяются следующим образом: в первом автобусе - $\frac{x}{81}$·100%; а во втором: $\frac{38-x}{81}$·100%. По условию процентные содержания пирожков отличаются минимально. Следовательно необходимо найти минимальное значение функции: f(x)= $\frac{x}{81}$·100% - $\frac{38-x}{81}$·100%.

f(x)= $\frac{100x-100(38-x)}{81} = \frac{200x-3800}{81}$. Данная функция возрастающая, поэтому свое наименьшее значение она принимает при минимальном x. Т.к. x – натуральное число, то x=19.

Ответ: в первый автобус нужно отдать 19 пирожков с вишней.

10. Банк планирует на один год вложить 20% имеющихся у него средств клиентов в проект A, а остальные 80% - в проект B. В зависимости от обстоятельств проект A может принести *прибыль в размере от 27% до 32% годовых, а проект В – от 37% до 42% годовых. В конце года банк обязан вернуть деньги клиентам и выплатить им проценты по заранее установленной ставке, уровень которой должен находиться от 15% до 20% годовых. Определите, какую* ***наибольшую*** *и какую* ***наименьшую*** *чистую прибыль в процентах годовых от суммарных вложений в проекты А и В может при этом получить банк.*

Решение: Пусть N- сумма вложений, а процентная ставка по вкладам, начисляемая банком равна **а.** Тогда в конце года банк должен выплатить клиентам: V=N(1+$\frac{a}{100}$)

	Вложено в проект	Доходы банка (P)	Выплаты клиентам (V)	Чистая прибыль банка (P-V)
A	0,2N	от 1,27(0,2N) до 1,32(0,2N)		
B	0,8 N	от 1,37(0,8N) до 1,42(0,8N)		
A+B		от 1, 35N до 1,4)	от1,15 до 1,2N	

Чистая прибыль банка равна разности доходов и выплат клиентам, т.е. P-V, а чистая прибыль в процентах от вложений равна $\frac{P-V}{N}$·100%. Получим: 1,35≤$\frac{P}{N}$≤1,4; 1,15≤$\frac{V}{N}$≤1,2

(умножим на -1), получим:

-1,2 ≤$-\frac{V}{N}$≤ - 1,15. Сложив почленно оба неравенства, получим:

0,15 ≤$\frac{P-V}{N}$≤ 0,25; 15% ≤$\frac{P-V}{N}$·100% ≤ 25%

Ответ: наименьшая прибыль банка 15%, наибольшая 25%

11.Алексей вышел из дома на прогулку со скоростью V км/ч. После того, как он прошел 6 км, из дома следом за ним выбежала собака Жучка, скорость которой была на 9 км/ч больше скорости Алексея. Когда Жучка догнала хозяина, они повернули назад и вместе возвратились домой со скоростью 4 км/ч. Найдите значение V, при котором время прогулки Алексея окажется наименьшим. Сколько при этом составит время его прогулки?

Решение:

Алексей, выйдя из дома со скоростью ***V*** км/ч на путь в 6 км потратил $\frac{6}{v}$ часов.

Пусть после этого Алексей до встречи с Жучкой прошел еще x км, на что ушло $\frac{x}{v}$ часов.

За тоже время ($\frac{x}{v}$ ч) Жучка пробежала 6+x км со скоростью v+9 (км/ч).

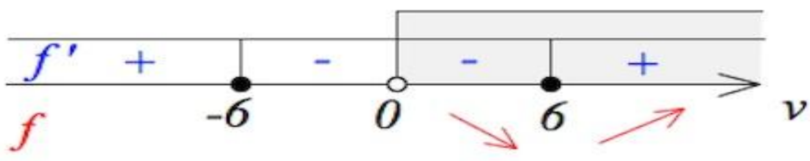
Тогда $\frac{x}{v} = \frac{6+x}{v+9}$ откуда x= $\frac{2v}{3}$

Время прогулки Алексея, с учетом того, что вместе с Жучкой они возвращались домой со скоростью 4 км/ч, составило, таким образом,

$\frac{6}{v} + \frac{x}{v} + \frac{6+x}{4}$ часов (или $\frac{6}{v} + \frac{2}{3} + \frac{9+x}{6}$часов).

Рассмотрим функцию f(v)= $\frac{6}{v} + \frac{2}{3} + \frac{9+x}{6}$ и найдем v, при котором функция принимает наименьшее значение (а также само наименьшее значение).

f '(v)= - $\frac{6}{v2} + \frac{1}{6}$. Решим уравнение: - $\frac{6}{v2} + \frac{1}{6}$=0. Получим: v_1=-6 и v_2=6



V=6 – точка минимума, в ней и достигается наименьшее значение функции. $\frac{6}{6} + \frac{2}{3} + \frac{9+6}{6}$ =4$\frac{1}{6}$ (ч)

Ответ: 6 км/ч; 4 часа 10 минут.

11. *Из строительных деталей двух видов можно собрать три типа домов. Для сборки 12-квартирного дома необходимо 70 деталей первого и 100 деталей второго типа. Для 16-квартирного дома требуется 110 и 150, а для дома на 21 квартиру нужно150 и 200 деталей первого и второго видов соответственно. Всего имеется 900 деталей первого и 1300 деталей второго вида. Сколько и каких домов нужно собрать, чтобы общее количество квартир в них было наибольшим?*

Решение:

На один большой дом требуется 150 и 200 деталей первого и второго типа.
Для двух маленьких домов требуется 140 = 70·2 и 200 = 100·2 деталей.
Таким образом, деталей хватит, и 10 деталей первого типа останется.

Для того, чтобы квартир оказалось больше, бригада вместо большого дома построит два маленьких. 2·12 > 21.

Для двух средних домов потребуется 220 = 110·2 и 300 = 150·2 деталей.
Для трёх маленьких домов требуется 210 = 70·3 и 300 = 100·3 деталей.
И снова деталей хватит, и опять 10 деталей первого типа останется.

Для того, чтобы квартир оказалось больше, бригада вместо двух средних домов построит три маленьких. $3 \cdot 12 > 2 \cdot 16$.

Итак, большие дома строить нецелесообразно, а средних домов может быть максимум один, так как каждые два строители заменят тремя маленькими.

Исходя из условия задачи, можно составить систему неравенств:

$$\begin{cases} 7x+11y+15z \leq 90 \\ 2x+3y+4z \leq 26 \end{cases}$$

Здесь x, y и z - число маленьких, средних и больших домов соответственно.
Если нет ни средних, ни больших, то деталей хватит лишь на 12 маленьких.
В итоге квартир получится $12 \cdot 12 = 144$.

Однако, один маленький можно заменить на один средний ($x = 11$, $y = 1$).
Число домов не изменится, но число квартир увеличится $11 \cdot 12 + 16 = 148$.

Ответ: 11 маленьких и 1 большой

Задачи для самостоятельного решения:

1. При оплате услуг через платежный терминал взимается комиссия 5%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Аня хочет положить на счет своего мобильного телефона не меньше 300 рублей. Какую минимальную сумму она должна положить в приемное устройство данного терминала.
   Ответ: 320 рублей

2. Строительство нового завода стоит 100 млн рублей. Затраты на производство тысячи ед. продукции в этом цехе равны $0,5x^2+x+7$ млн. руб.в год. Если продукцию продать по цене р тыс. руб.за единицу, то прибыль фирмы (в млн. руб.) за один год составит $px-(0,5x^2+x+7)$. Когда завод будет построен, фирма станет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении р строительство цеха окупится не более, чем за 4 года?

   Ответ: р=9

3. Первичная информация разделяется по серверам №1и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объеме t^2 Гб входящей в него информации выходит 20t Гб , а сервера №2 при объеме t^2 Гб входящей в него информации выходит 21t Гб обработанной информации. $25\leq t \leq 55$. Каков наибольший объем выходящей информации при общем объеме входящей информации в 3364 Гб?

   Ответ: 1682 Гб.

4. Стоимость изготовления n банок пропорциональна величине $24+4n+n^2$

   При каком количестве банок стоимость изготовления одной банки минимальна?

   Ответ: 5 банок.

5. Правительство решило закрыть нерентабельные шахты и построить новые фабрики и заводы. В результате закрытия одной шахты увольняется 180 человек, при этом на консервацию шахты и выплату пособий увольняемым выплачивается 52 млн. рублей. Строительство одного нового завода с персоналом 170 человек стоит 43 млн. рублей, а одной фабрики с персоналом 110 человек - 20 млн. рублей. Чему равно максимально возможное увеличение суммарного числа новых рабочих мест, если известно, что сумма всех затрат правительства составила 714 млн. рублей?

6. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести

добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Ответ: 5 400 кг сплава сможет произвести завод ежедневно.

7. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

Ответ: 86 000 рублей сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель.

8. В двух областях есть по 90 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

Ответ: 165 кг металлов можно добыть в двух областях.

9. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 200ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет - 200 ц/га, а на втором – 300 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а свеклу - по цене 13 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Ответ: 69 000 000 рублей может получить фермер.

10. В двух областях есть по 250 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день

требуется x^2 человеко-часов, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причем 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности.

Ответ: 300 кг металлов можно добыть в двух областях.

11. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свеклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором – 300ц/га. Урожайность свеклы на первом поле составляет - 300 ц/га, а на втором – 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 5 000 руб. за центнер, а свеклу - по цене 6 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Ответ: 44 000 рублей может получить фермер.

12. В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металла так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Ответ: 240 кг металлов можно добыть в двух областях.

13. На каждом из двух комбинатов работает по 1 800 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 1 детали А или 2 деталь В. На втором комбинате для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, из которых собирают изделие, для изготовления которого нужна 1 деталь А и 1 детали В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях сможет собрать комбинат за смену?

Ответ: 1860 изделий

14. На каждом из двух комбинатов работает по 200 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 1 детали А или 3 деталь В. На втором комбинате для изготовления t деталей (и А, и В) требуется t^2 человеко-смен. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, из которых собирают изделие, для изготовления которого нужны 1 деталь А и 1 деталь В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях сможет собрать комбинат за смену?

Ответ: 220 изделий.

15. На каждом из двух комбинатов изготавливают детали А и В. На первом комбинате работает 40 человек, и один рабочий изготавливает за смену 15 детали А или 5 деталей В. На втором комбинате работает 160 человек, и один рабочий изготавливает за смену 5 деталей А и 15 деталей В. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, из которых собирают изделие, для изготовления которого нужны 2 детали А и 1 деталь В. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях сможет собрать комбинат за смену?

Ответ: 1800 изделий.

16. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нем отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 855 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» - 3000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своем отеле предприниматель?

Ответ: 63 000 рублей.

3. Сюжетные задачи.

Сюжетные математические задачи являются моделями жизненных ситуаций, связующим звеном между разнообразными сюжетами реального мира и строгими формами математических выражений и операций. Сюжетные математические задачи являются полигоном для распознавания проблемных ситуаций, возникающих в окружающей среде, которые можно решить математическими средствами. Таким образом, формируя общие способы и методы решения сюжетных математических задач мы учим детей определенным образом действовать, на основе математических знаний, в ситуациях, возникающих в повседневной жизни.

Методы решения сюжетных задач.

Сюжетные задачи многими людьми, окончившими школу, вспоминаются как самые трудные. Для того чтобы понять, в чем состоит сложность решения этих задач, необходимо проанализировать собственный опыт их решения.

В каждой сюжетной задаче можно выделить:

- ✓ числовые значения величин, которые называются данными, или известными (их должно быть не меньше двух);
- ✓ некоторую систему функциональных зависимостей в неявной форме, взаимно связывающих искомое с данными и данные между собой (словесный материал, указывающий на характер связей между данными и искомыми);
- ✓ требование или вопрос, на который надо найти ответ.

Существуют различные методы решения данного класса задач:

- ✓ арифметический метод;
- ✓ алгебраический метод;
- ✓ функционально-графический метод решения текстовых задач;

Сюжетные задачи с экономическим содержанием, встречающиеся в КИМах чаще всего это задачи на кредиты и вклады.

Решая сюжетную задачу надо четко понимать ее математическую модель.

Говорят, что имеем дело со «сложными процентами» в том случае, когда некоторая величина подвержена поэтапному изменению. При этом каждый раз ее изменение составляет определенное число процентов от значения, которое эта величина имела на предыдущем этапе. Рассмотрим 3 случая.

Случай 1. В конце каждого этапа величина изменяется на одно и то же постоянное количество процентов – p%. Тогда в конце n-го этапа значение некоторой величины А, исходное значение которой равнялось A_0, определяется формулой:

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

Случай 2. Прирост величины А на каждом этапе различный.

Пусть величина А в конце 1-го этапа испытывает изменение на p_1%, а в конце 2-го этапа – на p_2 % и т.д. Если $p_к > 0$, то величина А возрастает; если $p_к < 0$, то величина А убывает. Тогда в конце n-го этапа значение величины А, первоначальное значение которой равнялось A_0, будет определяться формулой:

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_x}{100}\right)$$

Случай 3. Иногда в задачах встречается понятие «средний процент прироста». Под этим понимают такой постоянный процент прироста, который за n этапов давал бы такое же изменение величины А, которое она получает в действительности, при неравных поэтапных процентах изменения.

Средний процент прироста q% можно найти из равенства:

$$A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_m}{100}\right) = A_0\left(1+\frac{q}{100}\right)^n, A_n = A_0\left(1+\frac{q}{100}\right)^n$$

Обратите внимание средний процент прироста не равен среднему арифметическому процентов прироста.

Рассмотрим несколько сюжетных задач.

Пример. Сберкасса выплачивает 3 % годовых. Через сколько лет внесенная сумма удвоится?

Поиск решения.

Какие вопросы мы можем задать при решении данной задачи?

На какой случай эта задача?

Как мы обозначим первоначальная величину вклада?

Если A_0 – сумма первоначального вклада, как тогда мы запишем выражение для удвоенного вклада?

Какова процентная ставка банка?

Запишем формулу для вычисления размера этого вклада через n лет:

Итак, через n лет размер вклада удвоится.

Ну, а теперь попробуем ответить на эти вопросы.

Принято первоначальную величину вклада обозначать через A_0

- Удвоенный вклад будет равен: $2 \cdot A_0$
- три процента

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$\Rightarrow A_0\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n = 2A_0 \Rightarrow n = \log_{1,03} 2 \approx 23$$

Решение. Задача на 1 случай.

Пусть первоначальная величина вклада составляет A_0 рублей. Тогда через п лет эта величина равняется $2A_0$ р. или р $A_n = A_0\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n$.

Составим уравнение:

$$\Rightarrow A_0\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n = 2A_0.$$

Решаем его.

$$n = \log_{1,03} 2 \approx 23$$

Ответ: вклад удвоится через 23 года.

Пример. Акционерное общество «МММ-лимитед» объявило котировку своих акций на ближайшие 3 месяца с приростом в процентах последовательно по месяцам на 243 %, 412 % и 629 % по отношению к каждому предыдущему месяцу. Каков средний ежемесячный рост котировок акций за указанный период?

Поиск решения.

Как вы думаете, на какой из трех случаев данная задача? (на третий)

Какой формулой мы будем пользоваться?

$$A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_m}{100}\right)=A_0\left(1+\frac{q}{100}\right)^n$$

На какой срок объявлена котировка акций?

Сроком на 3 месяца, причем каждый месяц процентная ставка меняется

Каковы значения приростов котировок акций за эти 3 месяца?

- p_1=243%, p_2=412% и p_1=629%.

Подставим эти данные в формулу.

$$A_0\left(1+\frac{x}{100}\right)^3=A_0\left(1+\frac{243}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{412}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{629}{100}\right)$$

Решение.

$$A_0\left(1+\frac{x}{100}\right)^3=A_0\left(1+\frac{243}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{412}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{629}{100}\right)$$

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^3=\frac{343\cdot 512\cdot 729}{100^3};$$

$$1+\frac{x}{100}=\sqrt[3]{\frac{343\cdot 512\cdot 729}{100^3}};$$

$$1+\frac{x}{100}=\sqrt[3]{\frac{7^3\cdot 8^3\cdot 9^3}{100^3}};$$

$$100+x=504;$$

$$x=404\Rightarrow p_{св}=404\%$$

Ответ: 404 % – средний ежемесячный рост котировок акций.

Пример. Себестоимость изделия понизилась за 1 полугодие на 10 %, а за второе – на 20 %. Определить первоначальную себестоимость изделия, если новая себестоимость стала 576 руб.

Решение.

A_0 – исходная себестоимость товара

$$\left.\begin{aligned}A_1&=A_0\left(1-\frac{10}{100}\right)\\A_2&=A_1\left(1-\frac{20}{100}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow A_2=A_0\left(1-\frac{10}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)$$

$$A_0\left(1-\frac{10}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)=576$$

$$A_0\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=576$$

$$A_0 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{4}{5} = 576;$$

$$A_0 \cdot \frac{18}{25} = 576 \Rightarrow A_0 = \frac{576 \cdot 25}{1 \cdot 18} = 800$$

Ответ: исходная себестоимость 800 руб.

Пример. Вкладчик открыл счет и положил на него сумму в 25000 р. сроком на 4 года под простые (без капитализации) проценты по ставке 11,5 % годовых. Какой будет сумма, которую вкладчик получит при закрытии вклада? На сколько рублей вырастет вклад за 4 года? Чему равен коэффициент наращения (то есть на сколько процентов вырастет сумма вклада)?

Решение.

Обозначим через A_0– первоначальный капитал, P – процентная ставка, n – количество полных лет, A_n– сумма капитала с начисленными процентами на конец n - го года.

Тогда модель функционирования вклада путем начисления простых процентов будет выглядеть следующим образом:

$$A_n = \left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right) \cdot A_0$$

Данная формула и будет выражать математическую модель данной экономической задачи.

Проведем расчеты, используя данные задачи. Так как $n = 4;\ p = 11{,}5;\ A_0 = 2500,$ получаем

$$.A_4 = \left(1 + \frac{4 \cdot 11{,}5}{100}\right) \cdot 2500 = 1{,}46 \cdot 2500 = 36500$$

Сумма вклада через 4 года будет равна 36500 р., то есть вклад вырастет на 11500 р.

Коэффициентом наращения простых процентов называют отношение $\frac{A_n}{A_0} = 1 + \frac{n \cdot p}{100}.$

Он показывает, во сколько раз вырос первоначальный вклад A_0за n лет хранения этой суммы в банке по схеме простых процентов с годовой ставкой p %.

В данном случае коэффициент наращения равен 1,46.

Пример.

В банке получена ссуда в размере 40 тыс. долл. США на 8 лет на следующих условиях: для первых трех лет процентная ставка равна 28% годовых, на следующий год она увеличивается на 2%, и на последующие годы еще на 2,5%. Найдите сумму, которая должна быть возвращена банку по окончании срока ссуды при ежегодных начислениях сложных процентов.

Напомним, что *сложный процент* (или по-другому "процент на процент") – это такое увеличение капитала, когда накопленная за первый период сумма прибавляется к первоначальной, то есть, говоря экономическим языком, первоначальная сумма капитализируется, и в новом периоде процент будет начисляться уже на новую, увеличенную сумму.)

Решение.

Разобьем весь срок на периоды равной годовой процентной ставки. В первый период идет начисление p_1% годовых, длина периода – n_1 лет, потом n_2 лет идет начисление p_2% годовых, и в третий период продолжительностью n_3 года идет начисление p_3%и т.д. Тогда за первый период будет начислена следующая сумма:

$$A_1 = A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^n$$

за второй и третий соответственно: $A_2 = A_1\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^n$ и $A_3 = A_2\left(1+\frac{3}{100}\right)^n$

и т.д.

Значит, по прошествии $n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$ лет наращенная сумма А равна

$$A = A_0 \cdot \left(1+\frac{p_1}{100}\right)^n \cdot \left(1+\frac{p_2}{100}\right)^n \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{p_k}{100}\right)^n$$

В нашей задаче три периода. В первый период идет начисление 28% годовых, длина периода – 3 года, потом 1 год идет начисление 30%, и в третий период – 4 года – идет начисление 32,5%. Тогда за первый период будет начислена следующая сумма:

$$A = 40 \cdot \left(1+\frac{28}{100}\right)^3 \cdot \left(1+\frac{30}{100}\right)^1 \cdot \left(1+\frac{32{,}5}{100}\right)^4 = 40 \cdot 1{,}28^3 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}325^4 \approx 336{,}122$$

Сумма возврата равна 336,122 тыс. долл. США с точностью до доллара.

Рассмотрим задачу, которая не требует применения какого-либо метода, связанного с составлением и решением уравнений, а решается на уровне логических рассуждений.

Нахождение количества лет выплаты кредита

Пример. Максим хочет взять кредит 1,5 млн. руб. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых.
На какое минимальное количество лет может взять Максим кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 350 т.р.?

1 способ.

Решение: Представим решение данной задачи в виде таблицы.

	Выплаты Максима	Начисление банка	Остаток на конец года
31.12.15			1 500 000
31.12.16	350 000	1500000*10%=150 000	1500000+150000 - 350000 = 1 300 000
31.12.17	350 000	1300000*10% =130 000	1300000+130000 – 350000 = 1 080 000
31.12.18	350 000	1080000*10% =108 000	1080000+108000 – 350000 = 838 000
31.12.19	350 000	838000*10% = 83 800	838000+83800 – 350000 = 571 800
31.12.20	350 000	571800*10% = 57 180	571800+57180 – 350000 = 278 980
31.12.21	306 878	278980*10% =27 898	278980+27898 –306878 = 0

Ответ: Максим может взять кредит на 6 лет.

2 способ

1)В конце первого года долг составит:

$1500000 \cdot 1{,}1 - 350000 = 1300000$ (руб)

2) В конце второго года долг составит:

$1300000 \cdot 1{,}1 - 350000 = 1080000$ (руб)

3)В конце третьего года долг составит:

$1080000 \cdot 1{,}1 - 350000 = 838000$ (руб)

)В конце четвертого года долг составит:

$838000 \cdot 1{,}1 - 350000 = 571800$ (руб)

5)В конце пятого года долг составит:

$571800 \cdot 1{,}1 - 350000 = 278980$ (руб)

6) В конце шестого года долг составит:

$278900 \cdot 1{,}1 = 306878$ (руб)

Эта сумма менее 350000 руб. Значит, кредит будет погашен за 6 лет.

Ответ: 6 лет

Вычисление процентной ставки по кредиту.

Пример. Вычисление процентной ставки по кредиту. 31 декабря 2014 года Валерий взял в банке 1000000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая. 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Валерий переводит в банк очередной транш. Валерий выплатил кредит за два транша, то есть за два года. В первый раз Валерий перевел в банк 660000 рублей, во второй раз – 484000 рублей. Под какой процент банк выдал кредит Валерию?

Решение. Пусть а - процентная ставка по кредиту.

1)В конце первого года долг составит: $1000000 \cdot (1 + 0{,}01 \cdot a) - 660000 = 340000 + 10000 \cdot a$

2) В конце второго года долг составит: $(340000 + 10000 \cdot a) \cdot (1 + 0{,}01 \cdot a) - 484000$.

По условию задачи кредит будет погашен за два года. Составляем уравнение:

$(340000 + 10000 \cdot a) \cdot (1 + 0{,}01 \cdot a) - 484000 = 0$; $+ 134 \cdot a - 1440 = 0$

Решая уравнение, получаем, что а = 10.

Ответ: 10%

Нахождение суммы кредита.

Пример. 31 декабря 2014 года Максим взял в банке некоторую сумму денег в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами, то есть за 4 года?

Решение. Пусть S – сумма кредита.

1)В конце первого года долг составит: $(1{,}1x - 2928200)$ рублей

2) В конце второго года долг (в рублях) составит: (1,1x – 2928200)·1,1 – 2928200 = 1,21x – 3221020 – 2928200 = 1,21x – 6149220

3) В конце третьего года долг (в рублях) составит: (1,21x – 6149220)·1,1 – 2928200 = 1,331x – 6764142 – 2928200 = =1,331x – 9692342

4) В конце четвертого года долг (в рублях) составит 2928200 рублей: (1,331x – 9692342)·1,1 = 2928200; 1,4641x – 10661576 = 2928200; 1,4641x = 13589776; x = 9281999,8

Значит, сумма кредита равна 9282000 рублей.

Ответ: 9282000 руб

Нахождение ежегодного транша.

Пример. 31 декабря 2014 года Роман взял в банке 8599000 рублей в кредит под 14% годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга(то есть увеличивает долг на 14%), затем Роман переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Роман выплатил долг тремя равными платежами (то есть за 3 года)? Решение.

1)В конце первого года долг составит: 8599000·1,14 – X = 9802860 – X

2) В конце второго года долг составит: (9802860 - X)·1,14 – X=11175260 – 2,14·X

3) В конце третьего года долг (в рублях) составит: (11175260 – 2,14·X) ·1,14 – X=12739796 – 3,4396·X.

Составим уравнение: 12739796 – 3,4396·X= 0

X=3703860 рублей

Ответ: ежегодный транш составит 3703860 рублей

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вклад, положенный в банк 2 года назад, достиг 11449 рублей. Каков был первоначальный вклад при 7% годовых? Какова прибыль?

2. 1.01.15г. Андрей взял в банке 1,1 млн руб. в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого следующего месяца банк увеличивает оставшуюся к этому моменту сумму долга на 3%, затем Андрей переводит в банк платёж.

На какое минимальное количество месяцев Андрей может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. руб.?

3. Петр хочет взять кредит 1,3млн. руб. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых.
На какое минимальное количество лет может взять Пётр кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 340 т. р.?

Ну вот, представление о процентах в математике вы получили. Отметим самое важное.

4. Практические советы:

1. В задачах на проценты – переходим от процентов к конкретным величинам. Или, если надо – от конкретных величин к процентам. *Внимательно читаем задачу*!
2. Очень тщательно изучаем, ***от чего*** нужно считать проценты. Если об этом не сказано прямым текстом, то обязательно подразумевается. При последовательном изменении величины, проценты подразумеваются от последнего значения. *Внимательно читаем задачу!*
3. Закончив решать задачу, читаем её ещё раз. Вполне возможно, вы нашли промежуточный ответ, а не окончательный. *Внимательно читаем задачу!*

Решите несколько задач на проценты. Для закрепления, так сказать. В этих задачках мы постарались собрать все главные трудности, которые поджидают решающих. Те грабли, на которые чаще всего наступают. Вот они:
1. Элементарная логика при анализе простых задачек.
2. Правильный выбор величины, от которой нужно считать проценты. Сколько народу споткнулось на этом! А ведь есть очень простое правило...
3. Проценты от процентов. Мелочь, а смущает здорово...
4. И ещё одни вилы. Связь процентов с дробями и частями. Перевод их друг в друга.

Это полезно запомнить!

1. 1% от числа А $= \frac{1}{100} \cdot A$
2. За 100% принимается та величина, с которой сравнивают.
3. Если число А увеличили на p%, то получим: $A \cdot \left(1 + \frac{1}{100}\right)$;

4. Если число А уменьшили на р%, то получим: $A \cdot \left(1 - \frac{1}{100}\right)$

5. Если величину А увеличили на р% 2 раза, то получим: $A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$;

6. Если величину А увеличили на р% n количество раз, то получим:; $A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

7. Если величину А сначала увеличили на р%, а затем уменьшили на к%, получим:

$A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{k}{100}\right)$

8. Чтобы перевести проценты в десятичную дробь, необходимо количество процентов разделить на 100.

<u>Задачи для самостоятельного решения с ответами.</u>

1-уровень. После реконструкции завод увеличил выпуск продукции на 10%, а после замены оборудования еще на 30%. На сколько процентов увеличился первоначальный выпуск продукции?

(Ответ: на 43%)

2-уровень. Число 50 трижды увеличили на одно и то же число процентов, а потом уменьшили на это же число процентов. В результате получили число 69,12. На сколько процентов увеличивали, а потом уменьшали данное число?

(Ответ: на 20%)

3-уровень. Банк начисляет ежегодно 7% от суммы вклада. Найдите наименьшее число лет, за которое вклад вырастает более чем на 20%.

(Ответ: 3 года)

Сберегательный банк начисляет по вкладам ежегодно 5,5% годовых. Вкладчик внес в банк 150 тысяч рублей. Какой станет сумма вклада через 2 года?

(Ответ: 166953,75 руб.)

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1) Производительность труда в январе оказалась выше плановой на 5%, а в феврале снизилась на 5% по сравнению с январской. Сравните ее с плановой.

Ответ: 99,75% от плача

2) Себестоимость продукции сначала повысилась на 10%, а затем понизилась на 20%. .На сколько процентов понизилась себестоимость продукции?

Ответ: на 12%

3) За год работы предприятия объем дневной выработки продукции вырос на р%, а за следующий год — еще на (р + 50)%. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за первый год, если известно, что за 2 года она возросла в общей сложности втрое.

Ответ: на 100%

4)В течение года завод дважды увеличивал выпуск, продукции на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что в начале года завод выпускал ежемесячно 600 изделий, а в конце года стал выпускать ежемесячно 726 изделий.

Ответ: на 10%

5) Цёна товара снижена на 40%, а зарплата дважды увеличивалась на 20%. На сколько процентов больше можно купить товара после снижения цен и повышения зарплаты?

Ответ: на 140%

6) Фирма продала 3 партии автомобiлей. Во второй партии автомобиль стоил на 50% дороже, чем в первой партии, но продать удалось на 3 автомобиля меньше, так что выручка от продажи соответственно увеличилась всего на 20%. В третьей партии автомобиль стоил на 1 млн рублей дешевле по сравнению с первой партией, и продано 6ыло на 20% автомобилей больше, чем в первой партии. При этом выручка уменьшилась на 10%. Определить число автомобилей и цену автомобля в первой партии.

Ответ: 15 автомобилей, 4 млн. рублей.

7)Спустя год после того, как некоторая сумма внесена на сберегательную книжку, вклад за счет процентов увеличился на 20 рублей 16 копеек. Добавив еще 79 рублей 84 копейки, вкладчик, оставил свой вклад в сберегательной кассе еще на 1 год. По истечении этого периода общая сумма на сберегательной книжке стала равна 628 рублей 16 копеек. Какой процент годовых выплачивался сберегатеэьной кассой, если первоначальный взнос должен был быть не менее 5 рублей?

Ответ: 4%

8) Биржа запланировала провести торги в июле и августе. Если объем торгов в июле оставить на запланированном уровне, а план на август превысить в 3 раза, то суммарный объем торгов, проводимых в течение этих двух месяцев, возрастет в 2 раза. Найти отношение объемов торгов, запланированных на июль и на август.

Ответ: 1:1.

9) Курс рубля по отношению к доллару падает на 28 в квартал. Что выгоднее: а) сделать валютный вклад на год с начислением 60% годовых или б) конвертировать доллары в рубли и сделать рубленый вклад с начислением 510% годовых?

Ответ: первый вариант.

5.Заключение.

Задачи с экономическим содержанием являются практическими задачами. А их решение, бесспорно, способствует более качественному усвоению содержания курса математики средней школы, позволяет осуществлять перенос полученных знаний и умений в экономику, что в свою очередь, активизирует интерес к задачам прикладного характера и изучению математики в целом. Такие задачи позволяют наиболее полно реализовывать прикладную направленность в обучении и способствуют более качественному усвоению самого учебного материала и формированию умения решать задачи данного типа.

6.Литература.

1. Абчук В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций, СПб.: Союз, 1999.

2. Прокопьев А.А., Корянов А.Г. Социально – экономические задачи. «Легион». Ростов на Дону,2016

3. Методика работы с сюжетными задачами: Учебно-методическое пособие / Н.А. Малахова, В.В.Орлов, В.П.Радченко, В.Е.Ярмолюк; под ред. к.п.н., доц. Радченко, к.п.н. В.В.Орлова. С. Петербург: «Образование», 1992

4. А.А. Прокофьев, А.г. Корянов. «Социально-экономические задачи»

5.Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова «Подготовка к ЕГЭ -2016. Профильный уровень»

6.Интернет-ресурсы:

http://egemaximum.ru/zadanie-19-t-r-116-a-larina
http://egetrener.ru/view_vse.php